バナッハ束，ポテンシャル作用素，集団遺伝モデル，**L** 分布，加法過程

佐　藤　健　一

（I は 1994 年 6 月 25 日の話にいくらかを加えたものです．II はそのときに配った論文リストを若干補足したものです.）

I

名古屋大学の教養部が，他学部との一部のいれかえを経て情報文化学部と人間情報学研究科にかわり，その過程で設置審に何度も審査のために論文リストを出しました．それには一つ一つについて説明もつけなければなりませんでした．自分のそのリストを見ると，今までをふりかえっていろいろの感想がわきます．Paul Lévy の自伝（飛田武幸・山本喜一訳，一確率論研究者の回想，岩波，1973）を読むと，自分の仕事をふりかえって「残念だった」とかいろいろのことが出てきます．Lévy のようにスケールの大きい仕事は何もありません．しかし私もその感想のいくつかを話すことにします.

1. マルコフ過程の境界問題.

本尾実さんが話されたことに少し追加します．Wentzell の境界条件を満たす拡散過程の解析的構成のための十分条件を与えようと 1966-1967 にずいぶん考えました．それについて学会で話しミネソタのセミナーでも話したのが，*[2.5],*[2.6],*[2.7] です．*[2.5] は本尾さんとの共同でした．しかし結局論文にまとめなかったのが残念です．これは，私達の論文（特に上野さんとの共著の [2.3]）を見てフランスの J. M. Bony, Ph. Courrège, P. Priouret の 3 人が同じことを研究し，彼らの論文がまず C. R. Acad. Sci. Paris (tom. 263 (1966), 451-454), つづいて Séminaire Brelot-Choquet-Deny (10, fasc. 1 et 2, 1965/66), Ann.Inst.Fourier (tom. 18, fasc. 2 (1969), 369-521) に出て書きにくくなったことが原因です．しかしこの 3 人と私達とは方法が異なっていたので，得られた十分条件も異なっていました．だから書くべきだったのですが，もっと徹底してやろうと考えたために書かずに終ってしまいました．私にとって境界問題は中途半端に終りました.

しかし日本の確率論としては渡辺信三さんが Wentzell の境界条件に対する path の構成を行い[1], また確率論的な分解として本尾さんの見事な結果が生み出されました[2]. 本尾さんのこの仕事が世界であまり知られていないこと，その詳しい証明が英語では出されていないことが残念です.

---

[1]Banach Center Publ., Vol. 5 (1979), 255-271.

[2]Proc. Internat. Symp. Stoch. Diff. Eq., Kinokuniya, 1978, 265-281.

Wentzell の境界条件を日本で私達が見つけなかったのは残念です．1 次元の Feller, Dynkin, Ito-McKean を学習し，多次元に取り組もうとしていた何人もの人達が，問題を設定し考えさえすれば，簡単にできたでしょう．しかし境界条件の形までは出せても，A. D. Wentzell の論文[3]にあるように球で境界条件が定係数のときに球関数を使って解を求めたかは疑問で，私達の解析の力は弱かったと思います.

1960 年代の日本のマルコフ過程論が，境界問題を軸としながらもっと大きな対象へ広がって行った歴史については，本尾，池田，渡辺毅，上野，田中，渡辺信三，長沢，福島，国田，岡部などの仕事を検討して考えなければなりません.

2. バナッハ束.

実バナッハ空間 C, L^p, C^* などは順序構造をも持っています．バナッハ束はその一般化で，実バナッハ空間で，半順序 $f \leqslant g$ が定義されていて束になっている（すなわち，任意の f, g に対し $f \vee g = \sup\{f, g\}$ と $f \wedge g = \inf\{f, g\}$ が定義されている．従って $|f| = f \vee (-f), f^+ = f \vee 0, f^- = -(f \wedge 0)$ も定義されている），しかも

$$
\begin{gathered}
f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad f + h \leqslant g + h, \\
f \leqslant g,\ a \in \mathbf{R}_+ \quad \Longrightarrow \quad af \leqslant ag, \\
f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad -f \geqslant -g, \\
|f| \leqslant |g| \quad \Longrightarrow \quad \|f\| \leqslant \|g\|,
\end{gathered}
$$

という性質を持っているものです．私がバナッハ束でしたことはただ一つ，うまい汎関数 $\sigma(f, g)$ を見つけたことだけです．これを思いついたとき非常にうれしかったのを覚えています．長谷川実さん[4]がはじめて作用素の半群の理論に

$$
\tau(f, g) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1}(\|f + \epsilon g\| - \|f\|)
$$

を使ったのですが，私は [4.1] で $f \geqslant 0$ に対し

$$
\sigma(f, g) = \inf_k \lim_{b \to \infty} \tau(f, (g + k) \vee (-bf)) \quad (k \text{ は } f \wedge |k| = 0 \text{ を動かす})
$$

を導入しました．$\sigma(f, g)$ は非常によい性質を持っていて，正の縮小半群の生成作用素の特徴づけに使え，さらに生成作用素の和の理論に使えます．よい性質とはたとえば

$$
\begin{gathered}
-\|g^-\| \leqslant \sigma(f, g) \leqslant \|g^+\|, \\
\sigma(f, g + h) \leqslant \sigma(f, g) + \sigma(f, h), \\
g \leqslant h \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f, g) \leqslant \sigma(f, h), \\
f \wedge |h| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f, g) = \sigma(f, g + h),
\end{gathered}
$$

[3] Teor. Veroyatn. Primen., 4 (1959), 172-185.
[4] J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 290-302.

などです．A が線形作用素の強連続な半群 T_t の Hille-Yosida の生成作用素でその定義域が $\mathfrak{D}(A)$ であるとき，T_t が正の縮小半群であるための必要十分条件が

$$\text{すべての } f \in \mathfrak{D}(A) \text{ に対し } \sigma(f^+, Af) \leqslant 0 \tag{1}$$

であることがいえます．性質 (1) を dispersive（散逸的）と呼びました．これは非線形作用素にも使えます．$\sigma(f, g)$ を具体的に求めると，$f \neq 0, f \geqslant 0$ に対し，

$C(X)$ または $C_0(X)$ では $\sigma(f,g) = \max_{f(x)=\|f\|} g(x)$,

$L^1(X,m)$ では $\sigma(f,g) = \int_{\{f(x)>0\}} g(x)m(dx)$,

$L^p(X,m), 1 < p < \infty$, では $\sigma(f,g) = \|f\|^{-p+1} \int_X f(x)^{p-1} g(x)m(dx)$,

$C^*(X)$ では g の f に関する絶対連続成分を g_f^{ac} とするとき$\sigma(f,g) = g_f^{ac}(X)$,

などとなります．ですからたとえば $C(X)$ では (1) が，$f(x)$ が正の最大値をとる点では $Af(x)$ が非正であるという楕円型作用素の特徴づけになります．

L^2 におけるマルコフ半群はさらに,「$f \leqslant 1$ ならば $T_t f \leqslant 1$」という性質を持たねばならず，その特徴づけを国田寛さん（論文は Proc. Internat. Conf. on Func. Anal. and Rel. Topics, Tokyo, 1970, 332-343 に出ました）が与えました．その一般化を [4.4] で行いました．

$$\rho(f,g) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1}(\|(f+\epsilon g)^+\| - \|f^+\|)$$

も $\sigma(f,g)$ と同じ目的に使えることをそこに示しましたが，具体的な関数空間では $\sigma(f,g)$ の方がきれいです．

$\sigma(f,g)$ は非線形発展方程式で小西芳雄さん (Proc. Japan Acad., 47 (1971), 24-28; 48 (1972), 281-286 など) が使いましたが，バナッハ束の本や正の半群に関する本で，これを使えばもっときれいになるのに，使っていないのが不満です.（この話の後長井英生さんから L. C. Evans など[5] が [4.1] を使っていることを教わりました. しかし $\sigma(f,g)$ を full に用いてはいません.）

3. ポテンシャル作用素.

東大の学部 4 年生と大学院修士課程のとき (1957-1960) に私がついたのは吉田耕作さん (1909 生，1990 歿) です．線形作用素の半群に対する Hille-Yosida の理論が有名で，これは 2 人が独立に行なった仕事です（吉田さんのは J. Math. Soc. Japan, 1 (1948), 15-21）．20 年後吉田さんはこれに直接続く仕事をしました（Studia Math., 31 (1968), 531-533）．すなわち，T_t をバナッハ空間 $\mathfrak{B}$ における線形作用素の強連続半群，A をその生成作用素，J_λ を A のレゾルベント

$$J_\lambda f = (\lambda - A)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt$$

とするとき，$\text{s-lim}_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda f$ が $\mathfrak{B}$ 内の稠密な f に対して存在すれば，T_t はポテンシャル作用素 V をもつといい，この s-lim で Vf を定義しました．そして吉田さんは次

[5] L. C. Evans, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 875-887; L. C. Evans and A. Friedman, Trans. A. M. S., 253 (1979), 365-389; L. C. Evans, Israel J. Math., 36 (1980), 225-247.

のことを示しました．T_t がポテンシャル作用素をもつためには，次の (2), (3), (4) のどれでも必要十分である．

$$\text{(2)} \qquad A\,\text{の値域}\,\mathfrak{R}(A)\,\text{が}\,\mathfrak{B}\,\text{で稠密}.$$

$$\text{(3)} \qquad \text{すべての}\,f\,\text{に対し}\operatorname*{s-lim}_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda f = 0.$$

$$\text{(4)} \qquad \text{すべての}\,f\,\text{に対し}\operatorname*{s-lim}_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int_0^t T_s f ds = 0.$$

T_t がポテンシャル作用素 V をもてば，A は 1 対 1，$\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{R}(A)$，$V = A^{-1}$ である．V を吉田の意味のポテンシャル作用素とも呼んでいます．

私は [5.1] では C_0 上の半群から定まるマルコフ過程が，非再帰的または零再帰的ならばポテンシャル作用素をもち，正再帰的ならば持たない，ということをいい，安定過程などでその形を計算しました．

ここで特にお話したいのは [5.2] で次のことをはっきりさせたということです．これは F. Hirsch の 1970 の論文 (C. R. Acad. Sci. Paris, 270, 1487-1490) と吉田さんの 1972 の論文 (Publ. R. I. M. S., 8, 201-205) がヒルベルト空間で本質的には次のことをいっているのだと指摘し，バナッハ空間へは拡張できないことを言ったものです．

$\mathfrak{B}$ がヒルベルト空間で A がその中に稠密な定義域をもつ線形作用素であるとき，次の (5), (6) は同値である．

(5) A が，ポテンシャル作用素をもつ強連続縮小半群 $T_t^{(1)}$ の生成作用素である．

$$\text{(6)} \qquad -A\,\text{が強連続縮小半群}\,T_t^{(2)}\,\text{のポテンシャル作用素である}.$$

$T_t^{(1)}$ と $T_t^{(2)}$ のあいだには一体どんな関係があるのでしょうか．何らかの意味の adjoint にはちがいありませんが．前から疑問に思っています．なお，L^2 のとき $T_t^{(1)}, T_t^{(2)}$ の一方が正でも他方が正とは限りません．$\mathfrak{B}$ がバナッハ空間のときは，(5) の下では (6) と

$$\text{すべての}\lambda > 0\,\text{に対し}\,\|\lambda J_\lambda - 1\| \leqslant 1$$

とが同値です．ヒルベルト空間ではいつも $\|\lambda J_\lambda - 1/2\| \leqslant 1/2$ となります．

4. 無限分解可能分布の裾．

1973 の [6.1] が，私のはじめて無限分解可能分布そのものを扱ったものです（それまでも加法過程の生成作用素とポテンシャル作用素は扱っていましたが）．主な結果を（d 次元でも同様ですが）1 次元で述べます．μ を無限分解可能分布，ν をその Lévy 測度とします．

(i) $g(x)$ が劣乗法的（非負で，ある $a > 0$ が存在して $g(x+y) \leq ag(x)g(y)$ であること，たとえば，$\alpha > 0$ として $(1 \vee \log|x|)^\alpha, 1 \vee |x|^\alpha, e^{\alpha|x|}$）であるならば，$\int g(x)\mu(dx) < \infty$ と $\int_{|x|>1} g(x)\nu(dx) < \infty$ とは同値である．

(ii) $b = \inf\{r : \nu(|x| > r) = 0\}$ とする ($\inf \varnothing = \infty$). $\int e^{\alpha|x|\log|x|}\mu(dx)$ は, $\alpha < 1/b$ では有限, $\alpha > 1/b$ では ∞ である.

(ii) またはそれを裾の減少の度合自体で述べたものが，私のものの中では割合よく引用されています．はじめ (i) だけの結果を Ann. Math. Stat. に投稿し accept されたのですが，ちょうどこのとき Ann. Math. Stat. が Ann. Prob. と Ann. Stat. に分れることになったので，Ann. Prob. の方に出してほしいと言ったらば，referee をやりなおされました．その結果，これは V. M. Kruglov (Teor. Veroyatn. Primen., 15 (1970), 330-336) と同じだから駄目だと言って来ました．それで Kruglov がすでに同じこと（ただし 1 次元のときだけ）をしていたことを知りました．彼ものちに d 次元空間，ヒルベルト空間でも (i) を示しました．Kruglov のを見たところ 1 次元で (ii) の一部（ν の台が有界ならば，ある $\alpha > 0$ に対して (ii) における積分が有限）をしていたので，それを徹底させたのが (ii) の結果です．証明には V. M. Zolotarev による大偏差 (large deviation) の評価[6]を使いました．

[6.1] はあまり多くの人の興味をひいたと思えませんが，infinitely divisible process の論文[7]を書いて間もなくであった丸山儀四郎さん (1916 生，1986 歿) の励ましを受けました．[6.1] を考えた頃から無限分解可能分布とその Lévy 測度についての感覚が自分にできてきたような気がします．しかし無限分解可能分布と Lévy 測度との関係は非常にむずかしく，加法過程の分布の時間発展に関連して，1 次元でも解らないことだらけです．

5. 集団遺伝モデル.

これに関する主な仕事は [7.1], [8.1], [8.2], [8.6] で，これらは，[8.6] を除いて 1974-1975 にしたものです．S. Karlin と J. McGregor が 1964[8] と 1965[9] に直積分枝過程から定まる次のようなマルコフ連鎖を研究対象として導入しました．これは Karlin の本（確率過程講義，産業図書，1974）[10]にも解説されています．$Z_1(n)$, $Z_2(n)$ を独立な Galton-Watson 過程で 1 個の親から生れる子の数の分布は同じ（その母関数を $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$）で $c_0c_1c_2 > 0$ とします．正の整数 N に対し

$$P_{jk}^{(N)} = P(Z_1(n+1) = k \mid Z_1(n) = j, Z_2(n) = N - j, Z_1(n+1) + Z_2(n+1) = N)$$

とし，これを 1 回の推移確率とする集合 $\{0, 1, \dots N\}$ の上のマルコフ連鎖を考えます．彼等は $f(s)$ を適当にとり，またこの定義を拡張することによって，集団遺伝学における多くのモデルがこれに含まれることを示し，さらに，推移確率行列 $(P_{jk}^{(N)})$ は対角化可能で，その固有値は

$$1 = \lambda_0^{(N)} = \lambda_1^{(N)} > \lambda_2^{(N)} > \cdots > \lambda_N^{(N)} > 0$$

[6] Teor. Veroyatn. Primen., 10 (1965), 33-50.
[7] Teor. Veroyatn. Primen., 15 (1970), 3-23.
[8] Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 51, 598-602.
[9] Bernoulli Bayes Laplace Anniversary Volume, Springer, 111-145.
[10] A first course in stochastic processes, Academic Press, 1966.

であり，$r = 0, 1, \ldots, N$ に対し

$$\lambda_r^{(N)} = \frac{f(s)^{N-r} f'(s)^r \text{における } s^{N-r} \text{の係数}}{f(s)^N \text{における } s^N \text{の係数}} \tag{7}$$

であることを証明しました．これは遺伝子型 (allele) が 2 つのときですが，3 つ以上のときも扱え，また突然変異と移入の段階も加えることができます．しかし自然淘汰を考えることはできません．特に $\lambda_2^{(N)}$ は固定に近づく速さを表すので重要で，彼等は，$f(s)$ がポアソン分布，二項分布，負の二項分布のときに

$$1 - \lambda_2^{(N)} \sim \frac{\text{const}}{N}, \quad N \to \infty \tag{8}$$

を示しました．W. J. Ewens[11] は，$f(s)$ で表される分布の平均が 1 ならば (9) の const はその分散であることを注意しました．

わたしは，(8) が一般にいえるのか，その場合 const の意味は何か，$\lambda_r^{(N)}$ についてはどうか，r を N とともに大きくするときはどうか，などに興味をもち，これが動機で遺伝モデルを考えはじめました．これは日本の誰からの刺激によるものでもありません．しかし遺伝モデルは W.Feller の 1 次元拡散過程の研究の出発点にあり[12]，R.A.Fisher が遺伝子頻度の動きが拡散方程式を満たすことを言ったのは 1922 年という早い時です.

(7) の式を見て，これの $N \to \infty$ における挙動を調べるには大偏差 (large deviation) の解析を勉強すればよいに違いないと思いました．それで H. Cramér, V. V. Petrov, W. Richter, I. A. Ibragimov-Yu. V. Linnik などを勉強しました．特に Cramér[13]をよく勉強し，その方法（ Laplace の方法）に感心しました．他のものはそれの発展でした．Ibragimov と Linnik の本（英訳は Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971) は大偏差の理論を Cramér より弱い条件で Linnik が書いていますが，難しくて，確かめられない所がいくつもありました．1975 年に M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan 共著の大偏差に関する 3 篇の論文 (Comm. Pure Appl. Math., 28) が出て以来，急に，日本でも多くの人が大偏差を扱いはじめましたが，これ以前に確率論のグループで大偏差に取り組んでいたのは私だけだったと思います.

大偏差の方法を用いて

$$1 - \lambda_r^{(N)} = \frac{a_{r,1}}{N} + \frac{a_{r,2}}{N^2} + \cdots + \frac{a_{r,p}}{N^p} + O\left(\frac{1}{N^{p+1}}\right), \quad N \to \infty \tag{9}$$

の形の結果を得，係数も具体的に求めました（たとえば $a_{r,1} = \sigma^2 r(r-1)/2$ ）．r が N とともに大きくなるときも調べることができ，たとえば，任意の $c > 0$ に対し

$$\lambda_{[c\sqrt{N}]}^{(N)} = e^{-\sigma^2 c^2/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad N \to \infty \tag{10}$$

[11] Population genetics, Mathuen, 1969.

[12] Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1951, 227-246; Ann. Math., 54 (1951), 173-182.

[13] Actualités Scientifiques et Industrielles, No.736, 1938, 5-23.

を示しました．

このマルコフ連鎖を適当に時間空間のスケール変換して $N \to \infty$ とすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} x(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$

によって定まる拡散過程に収束しますが，この右辺の微分作用素は離散スペクトル $\lambda_r, r = 0, 1, \ldots,$ をもち，$\lambda_r = a_{r,1}$ であるので，(9) の第 1 項がスペクトルの収束

$$(\lambda_r^{(N)})^{Nt} \to e^{-a_{r,1} t}, \quad N \to \infty$$

を表わしています．第 2 項以下はこのマルコフ連鎖の拡散過程への収束の速さに関係しているはずです．また，固有ベクトルの固有関数への収束もいえるでしょう．しかし私はそこまでしませんでした．Karlin と McGregor は類似のモデルで，逆に，固有値と固有ベクトルの収束からマルコフ連鎖の拡散過程への収束をいっています[14]．

同じマルコフ連鎖に別のスケール変換を施して $N \to \infty$ とすると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x < \infty$$

によって定まる拡散過程に収束し，この右辺の微分作用素は 0 だけに点スペクトル，あとは連続スペクトルを持っています．(10) はこのときのスペクトル密度の収束を示しているはずですが，これも証明していません．固有ベクトルの広義の固有関数への収束もあるのでしょうか．

[8.1] は上のマルコフ連鎖の一般化の，拡散過程への収束を扱いました．しかし 2 次元以上では極限の拡散作用素の境界での退化の度合が強く，対応する拡散過程の一意性が，特別の場合しかいえませんでした．ところが 1975 年 11 月にシカゴに行ったとき S. N. Ethier を知り，彼がドクター論文に同じ方程式を扱っていて，その方法で一意性の証明ができることを知りました．2 階の係数が 2 次であることを利用した見事な方法でした．Ethier から [8.1] と合せて共著の論文にしようといわれました．そうすれば良い論文になることは明らかでしたが，若い人のはじめの論文は自分のしたことを単独で出す方がよいと考え，同意しませんでした．彼の論文は Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), 483-493 に出ました．

[8.2] ではじめて，自然淘汰を含む遺伝モデルの拡散過程への収束を扱うことができました．これによって，Karlin-McGregor のモデルの外に出ることができました．やはり Laplace の方法を徹底して，モーメントの漸近評価を行いました．

[8.6] について述べます．2 つの遺伝子型の間の増殖力の違い（あるいは 2 つのタイプの間の子の数の分布の違い）において，平均が同じでも分散が大きければ自然淘汰において不利に働きます．このときの拡散方程式は 2 階の項の係数が 3 次式になるということを，J. H. Gillespie (Genetics, 76 (1974), 601-606; 77 (1975), 403-413) が見つけました．この論文を教えてくれたのは M. F. Norman です．私は多次元で

[14] Proc. Camb. Phil. Soc., 58 (1962), 299-311.

はどんな係数が出て来るかを知りたいと思い，また，収束を正当化したいと思いました．これを行なったのが [8.6] です．これに突然変異が加わる場合は，境界が吸収壁でなくなるので拡散過程の一意性が証明できませんでした．大分考えましたができませんでした．これを解いたのは志賀徳造さん (J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 17-25) で，すばらしい結果だと思います．

集団遺伝学については木村資生の集団遺伝学概論 (培風館, 1960) を一応読んだだけで，あまり知らずにこういうことをしていたのですが，もっと知りたいと思って，1977-1978 に J. F. Crow and M. Kimura, An introduction to population genetics theory, Harper and Row, 1970 を勉強しました．しかしあまり興味がわかず，無限分解可能分布と加法過程の方がおもしろくて，その後遺伝モデルから離れました．

6. L 分布.

1975 年秋から 1976 年夏までミネソタに行ったのですが，帰って 7 月下旬に山里真さんから 1 次元 L 分布の単峰性の証明[15]を聞きました．これは私にとって，長くつづく衝撃でした．まずその key lemma の着想のことがありますが，それよりも，今までずっと何人もの人が取り組んで解けなかったものに取り組みそれを成しとげたことが，はじめて私達のところで確かめられたことです．この問題は A. I. Lapin の証明というのが B. V. Gnedenko と A. N. Kolmogorov の本にのっているのですが，この本の英訳 (Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, 1954) をした K. L. Chung がそこで使われている補題の誤りを発見した[16]のが起りです．その後 5 つ以上の論文がこれについて書かれましたが，未解決でした．安定分布（ L 分布に属する）でも，両側にあって非対称のときは単峰性が未解決でした．片側 L 分布の単峰性は S. J. Wolfe[17] が証明したのですが，山里さんはこれを知らずにまずこの片側の場合を証明し,「両側の場合はやはり難しい」と言っていたのを覚えています（それは 1975 年秋よりも前でした）.

山里さんの話にあったように，山里さんは，分枝過程の極限定理に現われる分布が L 分布であったことから L 分布に興味を持ったそうですが，わたしの場合は山里さんの仕事の後から，それを深める研究やそれに関連するクラスの研究を，山里さんと一緒に考えたり，単独で考えたり，いろいろして来ました．特に苦心した結果は，多次元 L 分布の絶対連続性と，狭義の作用素安定分布の特徴づけです.

1 次元 L 分布が 1 点に退化したものを除いて絶対連続であることは容易に分りますが，2 次元以上の非退化 L 分布が絶対連続かは，なかなか分りませんでした．Lévy 測度が特異のことがあるからです．しかし分解の方法を思いつき，証明ができました．それが [11.2] です.

指数が 1 のときだけは，安定分布が狭義安定分布をずらしたもので尽くされません．すなわち，d 次元において，指数 1 の安定分布が狭義安定分布になるのは Lévy 測度の球面成分の重心が原点にあるときだけです．このことはよく知られていますが，作用素安定分布の場合にこれに当る条件は何か，という問題を解いたのが [13.2]

[15] Ann. Prob., 6 (1978), 523-531.
[16] C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), 583-584.
[17] Ann. Math. Stat., 42 (1971), 912-918.

です．しかし私の求めた条件が，作用素安定過程においてどんな直観的意味を持っているのか，また，極限定理（作用素安定分布はもともと多次元の独立同分布の確率変数列の部分和の行列による正規化の極限分布として M. Sharpe[18] によって定義されたものです）においてどんな意味を持っているのか，分っていません．

気がつけば証明は簡単なことなのですが，[17.1], [17.2] に与えた，独立増分（時間的一様とは限らない）をもつ自己相似過程の分布としての L 分布の特徴づけは，L 分布の本質をついているものと思います．これによって，L 分布にはこの過程と加法過程（この言葉を私は時間的一様性を含めて使っています）との 2 つが対応することになります．自己相似過程の方を process of class L と呼び，加法過程の方を自己分解可能過程と呼びました．前者の性質を調べることは，まだほとんど手をつけられていません．

Ornstein-Uhlenbeck 型過程の極限分布としての L 分布（または作用素自己分解可能分布）の特徴づけ [12.2] は，L 分布の解析に現れる方程式の意味を山里さんと考えるうちに，S. J. Wolfe[19] のプレプリントも手にはいり，1981 年なかばに分って来たものです．ほとんど同じ時期に Z. J. Jurek-W. Vervaat と Wolfe も同様のことをしました．しかし，Ornstein-Uhlenbeck 型過程そのものを対象としてその再帰性，非再帰性の判定条件などを追求しているのは，私達だけです．この判定条件は，1 次元では志賀徳造さんが与え[20]，多次元では，山里さんと私に渡部俊朗さんが加わって [18.2]，さらに山室考司さんが加わって [18.3] を得ましたが，まだ解決できていない場合が残っています．

7. 加法過程．

ある時刻 t に分布が L 分布であるような加法過程 X_t は，すべての時刻において分布が L 分布ですから単峰です．しかし，一般の加法過程はそれよりもずっと複雑で，分布に時間発展があり，時間とともに単峰から非単峰に変ったり，非単峰から単峰に変ったり，またそれをくりかえしたりします．簡単な例は Wolfe[21] が注意したのですが，私はそれを意識的に調べることが重要であると考えて *[20.5] で述べました．増分が時間的一様であるにもかかわらず，分布に質的な時間発展，非線形的な時間発展があることを強調したいと思います．

[20.3] で，任意の正の整数 n に対し，時刻 1 では単峰だが時刻 2 で n 峰になる加法過程を構成することができました．これには，対数凸の密度をもつ片側分布は無限分解可能であるという F. W. Steutel[22] の結果を使います．

絶対連続性についても，加法過程が，時点 t_0 より前では連続特異で，t_0 より後では絶対連続になるという critical time t_0 を持つことがあることを，H. Rubin, H. G. Tucker[23] が示しており，私も [20.2] で例を加えました．

---

[18] Trans. A. M. S., 136 (1969), 51-65.
[19] Stoch. Proc. Appl., 12 (1982), 301-312.
[20] Prob. Th. Rel. Fields, 85 (1990),425-447.
[21] Zeit. Wahrsch., 45 (1978), 329-335.
[22] Math. Centre Tracts, No. 33, Amsterdam, 1970.
[23] Trans. A. M. S., 118 (1965), 316-330.

山里さんのもう 1 つの著しい仕事に強単峰性の研究[24] がありますが，これも時間発展の立場から見ることができます．なおこの山里さんの結果は加法過程の具体例を考察する際の強力な道具です.

1988 年頃から渡部俊朗さんが加法過程の分布の研究に精力的に取り組みはじめ，その仕事を追うことによって私も新たな活力を与えられたことを幸運に思います．渡部さんは複雑な計算を巧妙に行なって種々の例を単峰性やモードの動きについて与え， Jap. J. Math., 15 (1989), 191-203 の論文からはじまって今までに 7 つの論文が出ました．特に，新しい方法として，G. Forst[25] などの用いている $[0,\infty)$ の上の分布の離散分布（ Poisson 分布の混合）への変換を効果的に使っています．私は *[20.5] でこの変換を Poisson 変換と名づけ，*[21.6] でそれを解説しました.

加法過程に関しては，系統的に結果を調べ，*[21.5] の本をまとめました.

加法過程や Ornstein-Uhlenbeck 型過程のほかにも，これから取り組んで行きたいものは沢山ありますので，どうぞよろしくお願いします.

II

以下は私の今までの論文のリストです．論文ではないものも，その中からいくつかを * 印をつけて加えてあります.

1. マルコフ過程の存在.

[1.1] Integration of the generalized Kolmogorov-Feller backward equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.I, Vol.9, 13-27. (1961)

[1.2] Lévy measures for a class of Markov processes in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc., Vol.148, 211-231. (1970)

2. マルコフ過程の境界問題.

[2.1] (With H. Tanaka) Local times on the boundary for multi-dimensional reflecting diffusion. Proc. Japan Acad., Vol.38, 699-702. (1962)

[2.2] Time change and killing for multi-dimensional reflecting diffusion. Proc. Japan Acad., Vol.39, 69-73. (1963)

[2.3] (With T. Ueno) Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary. J. Math. Kyoto Univ., Vol.4, 529-605. (1965)

[2.4] A decomposition of Markov processes. J. Math. Soc. Japan, Vol.17, 219-243. (1965)

*[2.5] (本尾実と共同)　楕円型微分作用素の分数べきの評価と，生成作用素の和の問題へのその応用．日本数学会統計数学分科会一般講演要旨 (1967 年 5 月), p.5.

*[2.6] 2 階の項を含むベンツェリの境界条件をみたす拡散過程の存在．日本数学会統計数学分科会一般講演要旨 (1967 年 5 月), p.6.

*[2.7] Diffusion processes with general boundary conditions and Ueno's processes. Seminar handout at University of Minnesota, 10 pages. (1967)

[24] Ann. Prob., 10 (1982), 589-601.

[25] Zeit. Wahrsch., 49 (1979), 349-352.

3. マルコフ過程の一般論.（加法的汎関数. 時間逆転.）

[3.1] (With M. Nagasawa) Remarks to “The adjoint processes of diffusions with reflecting barrier”. Kôdai. Math. Sem. Rep., Vol.14, 119-122. (1962)

[3.2] (With M. Nagasawa) Some theorems on time change and killing of Markov processes. Kôdai. Math. Sem. Rep., Vol.15, 195-219. (1963)

[3.3] (With N. Ikeda and M. Nagasawa) A time reversion of Markov processes with killing. Kôdai. Math. Sem. Rep., Vol.16, 88-97. (1964)

*[3.4] Semigroups and Markov processes. Lecture Notes, Dept. Math., Univ. Minnesota. (1968)

4. バナッハ束. 生成作用素の特徴づけ. 生成作用素の和.

[4.1] On the generators of nonnegative contraction semigroups in Banach lattices. J. Math. Soc. Japan, Vol.20, 423-436. (1968)

[4.2] (With K. Gustafson) Some perturbation theorems for nonnegative contraction semigroups. J. Math. Soc. Japan, Vol.21, 200-204. (1969)

[4.3] Positive pseudo-resolvents in Banach lattices. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.I, Vol.17, 305-313. (1970)

[4.4] On dispersive operators in Banach lattices. Pacific J. Math., Vol.33, 429-443. (1970)

[4.5] A note on nonlinear dispersive operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA, Vol.18, 465-473. (1972)

5. ポテンシャル作用素.

[5.1] Potential operators for Markov processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., Vol.3, Univ. Calif. Press, 193-211. (1972)

[5.2] A note on infinitesimal generators and potential operators of contraction semigroups. Proc. Japan Acad., Vol.48, 450-453. (1972)

[5.3] Cores of potential operators for processes with stationary independent increments. Nagoya Math. J., Vol.48, 129-145. (1972)

*[5.4] マルコフ過程のポテンシャル作用素. マルコフ過程論, 数理解析研講究録, No.112, 55-79. (1971)

6. 無限分解可能分布の裾.

[6.1] A note on infinitely divisible distribiutions and their Lévy measures. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect.A, Vol.12, 101-109. (1973)

7. 集団遺伝モデル.（固有値の評価. 大偏差.）

[7.1] Asymptotic properties of eigenvalues of a class of Markov chains induced by direct product branching processes. J. Math. Soc. Japan, Vol.28, 192-211. (1976)

*[7.2] 集団遺伝学に現れるマルコフ連鎖の漸近的性質と, 大きな偏差に対する極限定理. マルコフ過程の研究, 1975 年 1 月シンポジウム報告, Seminar on Probability, Vol.41, 93-102. (1975)

8. 集団遺伝モデル.（拡散近似．自然淘汰.）

[8.1] Diffusion processes and a class of Markov chains related to population genetics. Osaka J. Math., Vol.13, 631-659. (1976)

[8.2] A class of Markov chains related to selection in population genetics. J. Math. Soc. Japan, Vol.28, 621-637. (1976)

[8.3] Convergence to diffusion processes for a class of Markov chains related to population genetics. Proc. Third Japan-USSR Symp. on Prob. Th., Lect. Notes in Math., Springer, No.550, 550-561. (1976)

[8.4] A note on convergence of probability measures on C and D. Ann. Sci. Kanazawa Univ., Vol.14, 1-5. (1977)

[8.5] Convergence of a class of Markov chains to multi-dimensional degenerate diffusion processes. Proc. Internat. Symp. on Stoch. Diff. Eq., Kinokuniya, 367-383. (1978)

[8.6] Convergence to a diffusion of a multi-allelic model in population genetics. Adv. Appl. Prob., Vol.10, 538-562. (1978)

[8.7] Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains. Measure Theory, Applications to Stoch. Analysis, Lect. Notes in Math., Springer, No.695, 127-137. (1978)

[8.8] Limit diffusions of some stepping-stone models. J. Appl. Prob., Vol.20, 460-471. (1983)

9. 1 次元 L 分布の詳しい性質.

[9.1] (With M. Yamazato) On distribution functions of class L. Zeitsch. Wahrscheinlich. verw. Gebiete, Bd.43, 273-308. (1978)

[9.2] (With M. Yamazato) On higher derivatives of distribution functions of class L. J. Math. Kyoto Univ., Vol.21, 575-591. (1981)

*[9.3] クラス L の分布について．Markov 過程の研究, 1976 年 12 月金沢シンポジウム報告, Seminar on Prob., Vol.44, 147-162. (1977)

10. L 分布の部分族.

[10.1] Urbanik's class L_m of probability measures. Ann. Sci. Kanazawa Univ., Vol.15, 1-10. (1978)

[10.2] Class L of multivariate distributions and its subclasses. J. Multivar. Anal., Vol.10, 207-232. (1980)

11. 多次元 L 分布の絶対連続性.

[11.1] On densities of multivariate distributions of class L. Ann. Sci. Kanazawa Univ., Vol.16, 1-9. (1979)

[11.2] Absolute continuity of multivariate distributions of class L. J. Multivar. Anal., Vol.12, 89-94. (1982)

12. L 分布と Ornstein-Uhlenbeck 型過程との関係.

[12.1] (With M. Yamazato) Stationary processes of Ornstein-Uhlenbeck type. Probability Theory and Math. Statistics, Fourth USSR-Japan Symp., Lect. Notes in Math., Springer, No.1021, 541-551. (1983)

[12.2] (With M. Yamazato) Operator-self-decomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type. Stoch. Proc. Appl., Vol.17, 73-100. (1984)

13. 作用素安定分布.

[13.1] (With M. Yamazato) Completely operator-self-decomposable distributions and operator-stable distributions. Nagoya Math. J., Vol.97, 71-94. (1985)

[13.2] Strictly operator-stable distributions. J. Multivar. Anal., Vol.22, 278-295. (1987)

*[13.3] Lectures on multivariate infinitely divisible distributions and operator-stable processes. Tech. Rep. Ser. Lab. Res. Stat. Prob., Carleton Univ. and Univ. Ottawa, No.54. (1985)

14. 加法過程のモードの挙動.

[14.1] Bounds of modes and unimodal processes with independent increments. Nagoya Math. J., Vol.104, 29-42. (1986)

[14.2] Behavior of modes of a class of processes with independent increments. J. Math. Soc. Japan, Vol.38, 679-695. (1986)

15. モードの評価の一般論.

[15.1] Modes and moments of unimodal distributions. Ann. Inst. Stat. Math., Vol.39, 407-415. (1987)

16. 出生死亡過程の汎関数の単峰性.

[16.1] Unimodality and bounds of modes for distributions of generalized sojourn times. Stochastic Methods in Biology, Lect. Notes in Biomath., Springer, No.70, 210-221. (1987)

[16.2] Some classes generated by exponential distributions. Probability Theory and Math. Statistics, Fifth Japan-USSR Symp., Lect. Notes in Math., Springer, No.1299, 454-463. (1988)

[16.3] On zeros of a system of polynomials and application to sojourn time distributions of birth-and-death processes. Trans. Amer. Math. Soc., Vol.309, 375-390. (1988)

17. L 分布と独立増分自己相似過程.

[17.1] Distributions of class L and self-similar processes with independent increments. White Noise Analysis. Mathematics and Applications, World Scientific, 360-373. (1990)

[17.2] Self-similar processes with independent increments. Prob. Th. Rel. Fields, Vol.89, 285-300. (1991)

18. Ornstein-Uhlenbeck 型過程の再帰性の判定条件.

[18.1] (With M. Yamazato) Remarks on recurrence criteria for processes of Ornstein-Uhlenbeck type. Functional Analysis and Related Topics, 1991, Lect. Notes in Math., Springer, No.1540, 329-340. (1993)

[18.2] (With T. Watanabe and M. Yamazato) Recurrence conditions for multidimensional processes of Ornstein-Uhlenbeck type. J. Math. Soc. Japan, Vol.46, 245-265. (1994)

[18.3] (With T. Watanabe, K. Yamamuro, and M. Yamazato) Multidimensional process of Ornstein-Uhlenbeck type with nondiagonalizable matrix in linear drift terms. Submitted to Nagoya Math. J.

19. 単峰分布のたたみこみの一般論.

[19.1] Convolution of unimodal distributions can produce any number of modes. Ann. Prob., Vol.21, 1543-1549. (1993)

20. 加法過程の分布の時間発展.

[20.1] On unimodality and mode behavior of Lévy processes. Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. Sixth USSR-Japan Symp., World Scientific, 292-305. (1992)

[20.2] Time evolution of distributions of Lévy processes from continuous singular to absolutely continuous. Research Bulletin, College of General Education, Nagoya Univ., Ser.B, No.38, 1-11. (1994)

[20.3] Multimodal convolutions of unimodal infinitely divisible distributions. Submitted to Teor. Veroyatn. Primenen.

[20.4] Time evolution in distributions of Lévy processes. Submitted to Southeast Asian Bulletin of Mathematics.

*[20.5] 加法過程の分布の単峰性に関する諸問題. 日本数学会統計数学分科会講演予稿集 (1992 年 10 月), 57-70.

21. その他.

[21.1] Subordination depending on a parameter. Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. Fifth Vilnius Conf., Vol.2, VSP/Mokslas, 372-382. (1990)

[21.2] (With M. Fukushima and S. Taniguchi) On the closable parts of pre-Dirichlet forms and the fine supports of underlying measures. Osaka J. Math., Vol.28, 517-535. (1991)

*[21.3] 無限分解可能分布. Seminar on Probability, Vol.52. (1981)

*[21.4] passage time の分布の性質. 集団遺伝学における確率モデル, シンポジウム報告集, 84-96. (1985)

*[21.5] 加法過程. 紀伊国屋. (1990)

*[21.6] Poisson 変換（連続分布から離散分布へ）について. 分布論に関する話題, 予稿集, 13-24. (1992)