レヴィ過程による確率積分の分布の性質
— 無限分解可能か否か，絶対連続か否か

佐　藤　健　一

次のような確率積分を考える．

$$\int_0^\infty c^{-N_{s-}}\,dY_s \tag{1}$$

これの分布を μ とする．ここで c は実数で $c>1$, $\{N_t, t\geq 0\}$ と $\{Y_t, t\geq 0\}$ はともにポアソン過程で，そのパラメタを a と b とする．さらに 2 次元の確率過程 $\{(N_t, Y_t), t\geq 0\}$ がレヴィ過程（すなわち独立増分を持ち時間的一様で，0 から出発し，path は右連続で左極限をもつ）とする．N_{s-} は s における左極限である．この講演の構成は次の通りである．

1. μ は無限分解可能か否か
2. μ は絶対連続か否か
3. この確率積分の由来．類似の確率積分の系列
4. 関連する注意

1 については，無限分解可能のときもそうでないときもあり，その判定条件をパラメタの範囲によって与える．さらに μ の対称化 μ^{sym} が無限分解可能か否かをも調べる．2 については，μ は一般に絶対連続であるか連続特異であるかであるが，その判定条件を与えることは非常に難しい問題であるので，絶対連続，連続特異のための十分条件を与える．3 ではまず，μ が「一般化 Ornstein–Uhlenbeck 過程」の特別の場合の定常分布であることを述べ，その観点から一つの系列へと拡張する．

1 から 3 までの内容は Alexander Lindner (Braunschweig 工科大学) との共同研究である [15], [16].

1. μ は無限分解可能か否か

レヴィ過程 $\{(N_t, Y_t), t \geq 0\}$ のレヴィ測度 ν は高々 3 点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ に集中している．すなわちレヴィ測度によって特性関数は

$$E[e^{i(z_1 N_t + z_2 Y_t)}] = \exp\left[t \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} - 1)\nu(dx)\right], \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

と表わされ, ν は

$$u = \nu(\{(1,0)\}), \quad v = \nu(\{(0,1)\}), \quad w = \nu(\{(1,1)\})$$

によって定まる．最初に述べた仮定から $u + w = a > 0$, $v + w = b > 0$ である．u, v, w を正規化して

$$p = \frac{u}{u+v+w}, \quad q = \frac{v}{u+v+w}, \quad r = \frac{w}{u+v+w}$$

とする． $p, q, r \geq 0$, $p + q + r = 1$, $p + r > 0$, $q + r > 0$ である．分布 μ を調べるには, $\{(N_t, Y_t), t \geq 0\}$ の強マルコフに当る性質から得られる次のことが重要である．$\widehat{\mu}$, $\widehat{\rho}$ で μ, ρ の特性関数を表わす.

補題 1.1. $\{N_t\}$ の最初の跳びの時刻を T とする．Y_T の分布を ρ とする．このとき

$$\widehat{\mu}(z) = \widehat{\rho}(z)\widehat{\mu}(c^{-1}z) \tag{3}$$

証明は

$$\int_0^\infty c^{-N_{s-}} dY_s = Y_T + \int_T^\infty c^{-N_{s-}} dY_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y_T + c^{-1} \int_0^\infty c^{-N'_{s-}} dY'_s$$

による．$\{(N'_t, Y'_t)\}$ は $\{(N_t, Y_t)\}$ の独立なコピーである．

一般に分布 σ に対し

$$\widehat{\sigma}(z) = \widehat{\rho}(z)\widehat{\sigma}(bz) \tag{4}$$

を満たす分布 ρ と実数 $b \in (0,1)$ が存在するとき，σ が b 分解可能 (b decomposable) であるという．我々の μ は c^{-1} 分解可能であり，この性質から

$$\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(c^{-n}z)\prod_{k=0}^{n-1}\widehat{\rho}(c^{-k}z),$$

したがって

$$\widehat{\mu}(z) = \prod_{k=0}^{\infty}\widehat{\rho}(c^{-k}z) \tag{5}$$

となる．これが μ の基礎になる性質である．b 分解可能の分布については Loève (1945) [17], Wolfe (1983) [35], Bunge (1997) [4], 渡部 (2000) [33] などの研究がある．

ρ の定義からその特性関数が計算でき，したがって μ の特性関数の表現も与えられる．

補題 1.2.

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{p + re^{iz}}{1 - qe^{iz}} \tag{6}$$

$$\widehat{\mu}(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{p + re^{ic^{-n}z}}{1 - qe^{ic^{-n}z}} \tag{7}$$

(6) は，ρ が幾何分布から点 0 における mass をいくらか減らしそれを正規化したものであることを示している．この補題から，ρ は q, r のみで定まり，μ は c, q, r のみで定まることが分る．なお r は $\{N_t\}, \{Y_t\}$ の 従属性のパラメタ というべきもので，$r = 0$ は独立と同等，$r = 1$ は $N_t = Y_t$ と同等である．$r = 1$ のときには ρ も μ も一点分布になるので，以下，$r < 1$ を仮定する．また．叙述を簡単にするためこの節では $p > 0, q > 0$ をも仮定する．ID を $\mathbb{R}$ の上の無限分解可能分布の全体とする．

定理 1.3. $\quad \rho \in ID \quad \Leftrightarrow \quad r \leq pq$

定理 1.4. $\quad \mu \in ID \quad \Leftrightarrow \quad \rho \in ID$

定理 1.3 の “$\Leftarrow$” は (6) を

$$\widehat{\rho}(z) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ikz}-1)\frac{q^k}{k}\left(1-\left(-\frac{r}{pq}\right)^k\right)\right].$$

と変形しこれがレヴィ–ヒンチンの標準形を与えていることから分る．“$\Rightarrow$” は Katti (1967) [12] の判定条件 ([26] p. 386) を用いて分る．定理 1.4 の “$\Leftarrow$” は (5) から分る．しかし “$\Rightarrow$” は簡単ではない．特性関数が零点をもつときは $\mu \notin ID$ が明らかであるが，それ以外のときは場合分けをして，レヴィ–ヒンチン型の表現が符号つき測度を用いていえるときにそれを用いるか，片側分布のラプラス変換に対する無限分解可能性の必要十分条件（Feller の [9] p. 450) を用いることができるかである．

一般に分布 μ の対称化 μ^{sym} を特性関数が $|\widehat{\mu}(z)|^2$ であるような分布として定義する．$\mu \in ID$ ならば $\mu^{\mathrm{sym}} \in ID$ であることは明らかであるが，その逆はいえないことを Gnedenko–Kolmogorov の本 [10] p. 82 が注意している．我々の ρ, μ に対しては次のことがいえる．

定理 1.5. $\quad \rho^{\mathrm{sym}} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad (r/p) \wedge (p/r) \le q$
($r = 0$ のときには $(r/p) \wedge (p/r) = 0$ と理解する.)

証明には，$r > pq$ のときの ρ^{sym} を調べるには，符号つき測度による $|\widehat{\rho}(z)|^2$ のレヴィ–ヒンチン型の表現ができるので，その符号つき測度が負の部分をもつための必要十分条件を考察すればよい．それはかなり複雑であるが，$p > qr$ が条件であることが分る．

定理 1.6. $\quad \mu^{\mathrm{sym}} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad \rho^{\mathrm{sym}} \in ID$

証明には $r > pq$ かつ $p > qr$ のときに $\mu^{\mathrm{sym}} \notin ID$ をいわなければならない．それは再び符号つき測度によるレヴィ–ヒンチン型の表現において，その符号つき測度が負の部分をもつための条件の考察である．

注意． 定理 1.3–1.6 から，$r > pq$ かつ $p \le qr$ のときには，$\rho, \mu \notin ID$ であるが $\rho^{\mathrm{sym}}, \mu^{\mathrm{sym}} \in ID$ である．このような現象が [10] にあるような例でなく簡単な確率過程に関連して現われることは注目に値いする．しかも [10] の例では両側分布であることが決定的にきいているが，我々の場合には ρ も μ も片側分布であるから，こういう現象の起るメカニズムが異なっている．

例． $2p = q$ とすると，

$$\rho,\, \mu \in ID \quad \Leftrightarrow \quad r \le (13 - 3\sqrt{17})/4 = 0.15767\cdots$$
$$\rho^{\mathrm{sym}},\, \mu^{\mathrm{sym}} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad r \le (13 - 3\sqrt{17})/4 \text{ または } r \ge 1/2$$

定理 1.3 – 1.6 がどのような確率論的意味をもつのか，無限分解可能のときにはその分布にレヴィ過程が対応するが，その過程がどんな意味をもつのか，については今のところ何らの手がかりもない．このことに関係するが，これらの定理は前もって予想することができない．結論は試行錯誤の結果得られたものである．

なお $\mu \in ID$, $\mu^{\mathrm{sym}} \in ID$ の判定条件が c に依存しないことは注目すべきである．

2. μ は絶対連続か否か

Wolfe (1983) [35] は一点分布でない c^{-1} 分解可能の分布は絶対連続または連続特異であることを示した．そこで問題は我々の μ がどんな時に絶対連続であり，どんな時に連続特異であるかを，解明することである．しかしそれを完全に解明することは極めて難しい．それは，$q = 0$ のときには，ρ が 0 と 1 の上の 2 点分布，μ が無限ベルヌーイ畳み込み (infinite Bernoulli convolution)（すなわち $\{U_n\}$ をベルヌーイ系列とするとき $\sum_{n=0}^{\infty} c^{-n} U_n$ の分布）になること，そして無限ベルヌーイ畳み込みの絶対連続と連続特異への分類は 1930 年代以来の難問であること (解説としてたとえば [24]) から想像できる．我々は $q = 0$ の場合を除いて考えるので，以下の結果が無限ベル

ヌーイ畳み込みを含むことはないが，その研究の中で開発された概念と技巧が我々の μ の研究にも役に立つ．特に PV 数と PS 数の概念を用いる．以下では μ が絶対連続になるための十分条件，連続特異になるための十分条件を与える．第 1 節の結果は c に依存しなかったが，この節の結果は c に強く依存する．

$c > 1$ が PV 数（Pisot–Vijayaraghavan 数または Pisot 数）であるとは，最高次の係数が 1 の整係数多項式 $F(x)$ の単根であって，$F(x)$ の他の根はすべて絶対値が 1 より小であることである．その全体を PV と書こう．もちろん PV は可算集合である．PV 数の例として，1 より大きいすべての整数，$F(x) = x^2 - x - 1$ の正の根 $(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180\cdots$，$F(x) = x^3 - x - 1$ のただ 1 つの実根 $1.3247\cdots$ などがある．[24] によると，$(1+\sqrt{5})/2$ は PV 数の集積点の中で最小のものである．PV 数をこの種の研究に用いはじめたのは Erdős (1939) [7] である．

次に，$b \in (0,1)$ が PS 数（Peres–Solomyak 数）であるとは，ある $p_0 \in (1/2, 1)$ と正の整数 k が存在して，ベルヌーイ系列 $\{U_n\}$ $(P(U_n = 0) = p_0,$ $P(U_n = 1) = 1 - p_0)$ から作った $\sum_{n=0}^{\infty} b^n U_n$ の特性関数の k 乗が可積分であることである．PS 数の逆数の全体を $(PS)^{-1}$ と書こう．PS 数という名前は渡部 (2000) [33] による．その p. 390 によると，区間 $(1,\infty)$ 内のほとんどすべての数は $(PS)^{-1}$ に属し，$PV \cap (PS)^{-1} = \emptyset$ であるが，$PV \cup (PS)^{-1} = (1,\infty)$ であるかどうかは知られていない．また $(PS)^{-1}$ に属する具体的な数の例も知られれていない．

以下この節では $q > 0$ とする．

定理 2.1. $c \in PV$ ならば，μ は連続特異である．

証明は Erdős [7] のアイディアに基ずく．すなわち Riemann–Lebesgue の定理により，$\limsup_{z\to\infty} |\widehat{\mu}(z)| > 0$ がいえれば μ は絶対連続でないので，$|\widehat{\mu}(z)|$ を下から評価するために PV 数という性質を用いる．

定理 2.2. $c \in (PS)^{-1}$ ならば，次のような $\varepsilon = \varepsilon(c) \in (0,1)$ が存在する: $p > 0$, $r \le pq$, $q \ge 1 - \varepsilon$ ならば，μ は絶対連続で，有界連続の密度をもつ．

μ のハウスドルフ次元 $\dim(\mu)$ とは，$\mu(B) = 1$ を満たすようなボレル集合 B のハウスドルフ次元の下限である．$\dim(\mu) < 1$ ならば μ は特異であるので，次の結果は応用が広い．

定理 2.3. ρ のエントロピーを $H(\rho)$ とするとき，

$$\dim(\mu) \le H(\rho)/\log c \tag{8}$$

定理 2.2, 2.3 は渡部 [33] の結果に帰着することによって証明される．

系 2.4. p, q, r を固定するとき，c が十分大きければ μ は連続特異である．

例. $r = 0$, すなわち $\{N_t\}$, $\{Y_t\}$ は独立とする．

(a) $c = e$ とするとき，$q \le 1 - \log 2 = 0.30685\cdots$ ならば μ は連続特異である．

(b) $q = 1/2$ とするとき，$c > 4$ ならば μ は連続特異である．

補足. (a) 一般のレヴィ過程 $\{\xi_t\}$ は（定義により時間的一様であるが）ξ_t の分布 σ^t の性質に時間発展があり得る ([26], 渡部 [34]). その一つとして，ある critical な時刻 $t_0 \in (0,\infty)$ が存在して $0 < t < t_0$ では σ^t が連続特異，$t > t_0$ では σ^t が絶対連続ということがある．その例は [26, 33] にあるが，パラメタ p, q, r, c の範囲により我々の μ もそのような性質をもつ．

(b) c を固定する．$r = 0$ の時には μ のレヴィ測度が q と共に増加することがいえる．したがって，$r = 0$ の時には，ある q に対して μ が絶対連続であれば，それ以上のすべての q に対し μ が絶対連続になる．

3. この確率積分の由来．類似の確率積分の系列

$\{V_t, t \ge 0\}$ が，2 次元レヴィ過程 $\{(\xi_t, \eta_t), t \ge 0\}$ から定まり U を初期条件とする一般化 OU 過程 (generalized Ornstein–Uhlenbeck process) であ

るとは,

$$V_t = e^{-\xi_t}\left(U + \int_0^t e^{\xi_{s-}} d\eta_s\right) \tag{9}$$

であることとする．ここで U と $\{(\xi_t, \eta_t)\}$ は独立とする．$\xi_t = t$ の場合の $\{V_t\}$ が，最近の多くの文献で Ornstein–Uhlenbeck 過程と呼ばれているものであり，$(\xi_t, \eta_t) = (t, B_t)$ で $\{B_t\}$ がブラウン運動のときの $\{V_t\}$ が古典的な Ornstein–Uhlenbeck 過程である．一般化 OU 過程の基礎的性質については Carmona–Petit–Yor [5, 6], 応用との関係については [15] に挙げた文献を見よ．

$\{(\xi_t, \eta_t)\}$ から新たなレヴィ過程 $\{(\xi_t, L_t)\}$ を

$$L_t = \eta_t + \sum_{0<s\le t} (e^{-(\xi_s - \xi_{s-})} - 1)(\eta_s - \eta_{s-}) - t\,\alpha \tag{10}$$

によって定義する．α は $\{(\xi_t, \eta_t)\}$ のガウス分散行列の対角成分とする．

$$\eta_t = L_t + \sum_{0<s\le t} (e^{\xi_s - \xi_{s-}} - 1)(L_s - L_{s-}) + t\,\alpha \tag{11}$$

となる．$\{(\xi_t, \eta_t)\}$ から定まる一般化 OU 過程 $\{V_t, t \ge 0\}$ が適当な U に対し定常過程になるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty e^{-\xi_{s-}} dL_s = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\xi_{s-}} dL_s \tag{12}$$

が概収束することである．このとき (12) の分布が定常分布を与える．定常分布は存在すればただ一つである．(12) の収束の条件を $\{(\xi_t, \eta_t)\}$ のレヴィ–ヒンチン表現の要素によって与えることができる．これらは Erickson–Maller (2004) [8], Lindner–Maller (2005) [14] (η_t が多次元のときには [13]) の結果である．(1) の分布の我々の μ は, $(\xi_t, L_t) = ((\log c)N_t, Y_t)$ となるような一般化 OU 過程 $\{V_t\}$ の定常分布である．

さて，2 次元レヴィ過程の系列 $\{(N_t, L_t^{(l)})\}$, $l \in \mathbb{Z}$, を次のように定義する．$(N_t, L_t^{(l)})$ は特性関数

$$E[e^{i(z_1 N_t + z_2 L_t^{(l)})}] = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}^2} (e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} - 1)\nu^{(l)}(dx)\right] \tag{13}$$

をもちレヴィ測度 $\nu^{(l)}$ は高々 3 点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,c^{-l})$ に集中していて，その値を u, v, w とする．$c>1$, $u+w>0$, $v+w>0$ とする．u, v, w の正規化を p, q, r とする．

$$\int_0^\infty c^{-N_{s-}}dL_s^{(l)} \tag{14}$$

の分布を $\mu^{(l)}$ とする．したがって第 1, 第 2 節との関係は $L_t^{(0)}=Y_t$, $\mu^{(0)}=\mu$ である．$\{N_t\}$ はパラメタ $u+w$ のポアソン過程であるが，$l\neq 0$ のとき $\{L_t^{(l)}\}$ は 2 点 1, c^{-l} にレヴィ測度を持ち得る．$(\xi_t^{(l)},\eta_t^{(l)})=((\log c)N_t, L_t^{(l-1)})$ と定義する．このとき

$$L_t^{(l)} \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{0<\le t} c^{-(N_s-N_{s-})}(L_s^{(l-1)}-L_{s-}^{(l-1)}),\quad l\in\mathbb{Z}$$

すなわち

$$L_t^{(l)} \overset{\mathrm{d}}{=} \eta_t^{(l)}+\sum_{0<\le t}(e^{-(\xi_s^{(l)}-\xi_{s-}^{(l)})}-1)(\eta_s^{(l)}-\eta_{s-}^{(l)}),\quad l\in\mathbb{Z}$$

であり，$(\xi_t^{(l)},\eta_t^{(l)})$ から定まる一般化 OU 過程の定常分布が $\mu^{(l)}$ である.

$l\in\mathbb{Z}$ に対し $\mu^{(l)}$ が無限分解可能か否か, $\mu^{(l)}$ が絶対連続か否かを調べよう．以下この節では $p>0$, $q>0$ とする．後者の問題は μ の性質に帰着する．

定理 3.1. $l\in\mathbb{Z}$ に対し次のことがいえる．

(15) $\mu^{(l)}$ が絶対連続 $\Leftrightarrow$ μ が絶対連続

(16) $\mu^{(l)}$ が連続特異 $\Leftrightarrow$ μ が連続特異

$$\dim(\mu^{(l)})=\dim(\mu) \tag{17}$$

証明. $\{N_t\}$ の最初の跳びの時刻を T とし，$L_T^{(l)}$ の分布を $\rho^{(l)}$ とすると，μ, ρ の代りに $\mu^{(l)}$, $\rho^{(l)}$ を用いて (3) がいえる．ゆえに $\mu^{(l)}$ は c^{-1} 分解可能で (5) と同じ式が成り立つ．$\rho^{(l)}$ は k と $k+c^{-l}$, $k=0,1,2,\ldots,$ に mass をもち

$$\widehat{\rho}^{(l)}(z)=\frac{p+re^{ic^{-l}z}}{1-qe^{iz}},\quad \widehat{\mu}^{(l)}(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{p+re^{ic^{-l-n}z}}{1-qe^{ic^{-n}z}}$$

であることが分る．このことから

$$\widehat{\mu}^{(l)}(z) = \widehat{\mu}^{(l+1)}(z)\,(p + re^{ic^{-l}z})\,(p+r)^{-1}$$

がいえる．これは $\mu^{(l)}$ が $\mu^{(l+1)}$ と $\mu^{(l+1)}$ を c^{-l} だけ移動したものとの混合であることを示している．ゆえに $\mu^{(l)}$ が絶対連続かどうか，連続特異かどうかは $\mu^{(l+1)}$ のそれと同じであり，$\dim(\mu^{(l)}) = \dim(\mu^{(l+1)})$ である．$\mu^{(0)} = \mu$ であるから，このことから (15)–(17) がいえる．

定理 2.3 の (8) と同様に

$$\dim(\mu^{(l)}) \le H(\rho^{(l)})/\log c \tag{18}$$

がいえる．$H(\rho^{(l)})$ は l に依存するが，

$$H(\rho^{(l)}) \begin{cases} = H(\rho^{(1)}) & (l > 0 \text{ のとき}) \\ = H(\rho^{(1)}) & (l \le 0 \text{ で } c^{-l} \text{ が整数でないとき}) \\ < H(\rho^{(1)}) & (l \le 0 \text{ で } c^{-l} \text{ が整数のとき}) \end{cases} \tag{19}$$

である．また

$$H(\rho^{(1)}) = (-p\log p - q\log q - r\log r)/(1-q) \le (\log 3)/(1-q) \tag{20}$$

である．ゆえに，系 2.4 よりも強く次のことがいえる．

定理 3.2. $\log c > (\log 3)/(1-q)$ ならば，$\mu^{(l)}$ は連続特異である．

無限分解可能かどうかの問題の方は，μ に帰着することはなく，系列化によって問題が難しくなる．次のことが分る．

定理 3.3. $l \in \mathbb{Z}$ とする．

(i) $\mu^{(l-1)} \in ID$ ならば $\mu^{(l)} \in ID$ である．

(ii) $r \ge p$ のときには，$\rho^{(l)} \notin ID$, $\mu^{(l)} \notin ID$ である．

定理 3.4. $l > 0$ とする．

(i) $\rho^{(l)} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad$ “$r = 0$” または “$c^l = 2$ かつ $r^2 \le p^2 q$”

(ii) $\quad \mu^{(l)} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad$ “$r \leq pq$” または “$m \in \{1,2,\ldots,l\}$ が存在して $c^m = 2$ かつ $r^2 \leq p^2 q$”

注意． 定理 3.4 の応用として，$l > 0$ ならば，$\mu^{(l)} \in ID$ かつ $\rho^{(l)} \notin ID$ の場合が存在する．たとえば，$0 < r \leq pq$ かつ $c^l \neq 2$ ならばその場合である．一般に c^{-1} 分解可能の分布に対しこのようなことが起り得ることは，Niedbalska-Rajba (1981) [23] が人工的な例を作って示したが，確率過程に関連した分布でこのようなことが起る例ははじめてである．

定理 3.5. $l < 0$ とする．

(i) $\quad \rho^{(l)} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad$ “$r = 0$” または “奇数 $k \geq 3$ が存在して $2c^{|l|} = k$ かつ $q^k \geq (k/2)(r/p)^2$”

(ii) $\;r > 0$ で，すべての整数 $j \geq |l|$ に対し $2c^j$ が非整数であるならば，$\mu^{(l)} \notin ID$ である．

$l < 0$ としよう．このとき $\mu^{(l)} \in ID$ のための必要十分条件はまだ得られていない．定理 3.5 によって，ある整数 $j \geq |l|$ に対し $2c^j$ が整数であるときを考察すればよい．また，定理 1.3, 1.4, 3.3 (i) により，$0 < r \leq pq$ の場合を考察すればよい．$l = -1$ のときでもまだ完全には解決されていないが，次のようなことがいえる．

M を正の整数とし，補助的に使う関数 $F_M(x)$, $f_M(x)$ を次のように定義する．$0 \leq x \leq 1$ に対し

$$F_M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M^{-n} x^{2M^n} \tag{21}$$

とし，$0 < x \leq 1$ に対し $f_M(x) \in (0,1)$ を

$$M^{-1} F_M(x) = F_M(f_M(x)x) \tag{22}$$

が成り立つようなただ一つの値とする．このとき $f_M(x)$ は次のような性質をもつ．

補題 3.6. $0 < x \leq 1$ の関数として $f_M(x)$ は連続，真に増加であって

$$f_M(x) \to M^{-1/2}, \qquad x \downarrow 0, \tag{23}$$

$$f_M(1) < M^{-1/4}, \tag{24}$$

$$\text{十分大きいすべての } M \text{ に対し} \quad f_M(1) < M^{-1/2}(1 + M^{-1}) \tag{25}$$

$$\text{すべての正の整数 } n \text{ に対し} \quad f_M(x^n) \geq f_M(x)^n \tag{26}$$

定理 3.7. $l = -1$ とする．整数 $M \geq 2$ に対し $c = M$ とする．このとき

$$\mu^{(-1)} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad f_M(q^M)q^M \geq r/p \tag{27}$$

定理 3.8. $l = -1$ とする．$c = M^{1/k}$ となる 2 つの整数 $M \geq 2, k \geq 2$ が存在し，

(28) $2 \leq k' \leq k$ をみたす整数 k' が k を整除すれば $M^{1/k'}$ は整数ではない

とする．このとき

$$\mu^{(-1)} \in ID \quad \Leftrightarrow \quad f_M(q^M)q^M \geq r/p \tag{29}$$

すなわち，このときの $\mu^{(-1)} \in ID$ の条件は $c = M$ のときの $\mu^{(-1)} \in ID$ の条件と同じである．

(28) が満たされていない時を考えよう．もし $M^{1/k}$ が整数ならば，定理 3.7 の場合になる．もし $M^{1/k}$ が非整数で，$2 \leq k' < k$ をみたすある整数 k' が k を整除し $M^{1/k'}$ が整数になるならば，$M^{1/k} = (M^{1/k'})^{k'/k}$ によって k の代りに k/k' の場合になり，(28) が満たされないような k' の数が減る．このようにして，$c = M^{1/k}$ で M, k が整数 ≥ 2 の場合がすべて扱える．

しかし $l = -1$ で，ある $j \geq 1$ に対し c^j が半整数の場合は残っている．

$l \in \mathbb{Z}$ に対し $\rho^{(l)}, \mu^{(l)}$ の対称化 $\rho^{(l)\,\mathrm{sym}}, \mu^{(l)\,\mathrm{sym}}$ に関して

$$\widehat{\mu}^{(l)\,\mathrm{sym}}(z) = \widehat{\rho}^{(l)\,\mathrm{sym}}(z)\,\widehat{\mu}^{(l)\,\mathrm{sym}}(c^{-1}z) \tag{30}$$

がいえるから，$\mu^{(l)\,\mathrm{sym}}$ は c^{-1} 分解可能である．$l > 0$ では次がいえる．

定理 3.9. $l>0$ とする．

(i) $\rho^{(l)\,\mathrm{sym}}\in ID \iff$ “$r=0$” または “$c^l=2$ かつ $(r/p)\wedge(p/r)\le\sqrt{q}$”

(ii) $\mu^{(l)\,\mathrm{sym}}\in ID \iff$ “$(r/p)\wedge(p/r)\le q$” または “$m\in\{1,2,\dots,l\}$ が存在して $c^m=2$ かつ $(r/p)\wedge(p/r)\le\sqrt{q}$”

補足．定理 1.5, 3.9 に $(r/p)\wedge(p/r)$ という量が現われるのは次のような事情による．$p'=r$, $q'=q$, $r'=p$, $c'=c$ とし，p, q, r, c の代りに p', q', r', c' を用いた時の $\mu^{(l)}$, $\rho^{(l)}$ に当る分布を $\mu^{(l)\prime}$, $\rho^{(l)\prime}$ とする．このとき $(\rho^{(l)\prime})^{\mathrm{sym}}=\rho^{(l)\,\mathrm{sym}}$, $(\mu^{(l)\prime})^{\mathrm{sym}}=\mu^{(l)\,\mathrm{sym}}$ である．

注意．定理 3.9 の応用として，$l>0$ ならば，$\mu^{(l)\mathrm{sym}}\in ID$, $\rho^{(l)\mathrm{sym}}\notin ID$ の場合が存在する．$r>0$, $(r/p)\wedge(p/r)\le q$, $c^l\ne 2$ であればその場合である．$\mu^{(l)\mathrm{sym}}$ は，(30) をみたす対称な c^{-1} 分解可能分布であり，対称性の下でもこのようなことが起り得ることは，知られていなかった．

定理 1.6, 3.4, 3.9 のそれぞれの後の注意で述べたように，古くからの無限分解可能分布の理論において病的現象のように思われていたもののいくつかが，我々の μ, ρ, $\mu^{(l)}$, $\rho^{(l)}$ において自然に現われることを強調しておきたい．

4. 関連する注意

我々の考察した μ, ρ, $\mu^{(l)}$, $\rho^{(l)}$ は，2 次元レヴィ過程 $\{(\xi_t,\eta_t)\}$ から定まる一般化 OU 過程の特別の場合の定常分布であった．それは $\xi_t=(\log c)N_t$, $\eta_t=L_t^{(l)}$ で $\{N_t\}$ がポアソン過程になり，$c>1$, $\{L_t^{(l)}\}$ は高々 2 点にレヴィ測度をもつ複合ポアソン過程になる場合であった．従来多くの研究がなされている $\xi_t=t$ の場合，すなわち，いわゆる Ornstein–Uhlenbeck 過程の場合

は (12) の収束の条件が

$$\int_0^\infty e^{-s} d\eta_s \tag{31}$$

の概収束となり，これは $\{\eta_t\}$ の対数モーメントが有限であることと同等である．この場合には定常分布すなわち (31) の分布は，無限分解可能であるのみならず自己分解可能 (selfdecomposable) となる．逆に，どんな自己分解可能分布も，いわゆる Ornstein–Uhlenbeck 過程の定常分布として現われる．自己分解可能であることはすべての $b \in (0,1)$ に対し b 分解可能であることと同等であり，一点分布でない自己分解可能分布は必ず絶対連続である．$\{\xi_t\}$ が正の跳びをもたず，しかも $t \to \infty$ において ∞ に概収束する時には，(12) が収束し，従って $\{(\xi_t, \eta_t)\}$ から定まる一般化 OU 過程は定常分布をもち，その定常分布は自己分解可能になる (Bertoin–Lindner–Maller [3], 近藤–前島–佐藤 [13]). 一般化 OU 過程の定常分布が自己分解可能になるのは，このような場合に限らない．実際，$\xi_t = (\log c)N_t$ で $\{N_t\}$ がポアソン過程，$c > 1$, $\{\eta_t\}$ が狭義安定過程またはずれ (drift) をもつブラウン運動，$\{N_t\}$ と $\{\eta_t\}$ が独立の時には，$\{(\xi_t, \eta_t)\}$ から定まる一般化 OU 過程の定常分布は自己分解可能になる ([13]). また，我々の $\mu^{(l)}$ が自己分解可能でないことは容易に分る．一般化 OU 過程の定常分布が自己分解可能になるための必要十分条件を求めることは今後の問題である．

一般化 OU 過程の定常分布を μ とすると，μ は一点分布に退化している場合を除いて連続である（すなわち一点の mass は 0 である). これは [3] の結果である．では，一点分布に退化している場合を除いていつも μ は絶対連続または連続特異であろうか．答は知られていない．μ がいつもある $b \in (0,1)$ に対し b 分解可能であろうかという問題にも答が知られていないが，これは，より強い問題である．

b 分解可能な無限分解可能分布の重要な例に半安定分布がある（その定義と性質は [26] を見よ）．半安定分布と一般化 OU 過程の定常分布との関係はまだ研究されていない．

以下，関連する研究について広く触れよう．

自己分解可能分布の族は安定分布の族とともに無限分解可能分布の族の最も重要な部分族であり，種々の表現がある．その一つがいわゆる Ornstein–Uhlenbeck 過程の定常分布としての表現であり，これはレヴィ過程による確率積分 (31) の分布としての，自己分解可能分布の表現である．それの一つの拡張の方向として，可測関数 $f(s)$ を与えて

$$\int_0^\infty f(s)d\eta_s = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(s)d\eta_s \tag{32}$$

の分布の全体 L_f を考える方向がある．ここで $\{\eta_t\}$ は，$\mathbb{R}$ の上のレヴィ過程で (32) が概収束の意味で存在するものをすべて動かす．L_f を調べるための基礎となる確率広義積分の研究が佐藤 [27]–[31] によってなされた．特に $f(s) = 1_{(0,1]}(s)\log(1/s)$ の場合に Goldie–Steutel–Bondesson クラスになり，$t = f(s)$ が $s = \int_t^\infty u^{-1}e^{-u}du$ の逆関数である場合に Thorin クラスになる (Barndorff-Nielsen–前島–佐藤 [2])．また $f(s) = 1_{(0,1]}(s)\,s$ の場合には L_f を Jurek クラスと呼ぶが，これは Jurek が [11] において考察したものである．$t = f(s)$ が $s = \int_t^1 (1-u)^{\alpha-\beta-1}u^{-\alpha-1}du$ $(\beta < \alpha)$ の逆関数または $s = \int_t^\infty u^{-\alpha-1}e^{-u}du$ の逆関数の場合は詳しく [30] で考察された．また $t = f(s)$ が $s = (2\pi)^{-1/2}\int_t^\infty e^{-u^2/2}du$ の逆関数のときの L_f は一般化タイプ G 分布である (青山–前島 [1], 前島–佐藤 [22])．さらに L_f に属する分布のレヴィ測度が Riemann–Liouville 積分で表わされる場合が現在研究されている (前島–Pérez-Abreu–佐藤 [19, 20])．η_t の $t = 1$ における分布が σ であるとき (32) の分布を $\Phi_f(\sigma)$ として写像 Φ_f を定義し，Φ_f の繰り返しの像を考える

ことにより

$$L_f = L_f^0 \supset L_f^1 \supset L_f^2 \supset \cdots$$

という減少列が得られる．$L_f^\infty = \bigcap_{m=1}^\infty L_f^m$ と定義する．$f(s) = e^{-s}$ のときこの列 L_f^m は L_m と書かれ，Urbanik [32] により別の方法で導入され佐藤 [25] 等により研究されたものと一致する．特に L_∞ は安定分布を含み収束と畳み込みによって閉じている最小の族であり，多くの異なった f に対し $L_f^\infty = L_\infty$ となる ([22]).

無限分解可能分布 σ がある $b \in (0,1)$ に対し b 分解可能で (4) の ρ も無限分解可能であるとき，σ を半自己分解可能 (semi-selfdecomposable) と呼ぶ (前島–内藤 [18], 佐藤 [26])．これは半レヴィ過程 (semi-Lévy process) すなわちレヴィ過程における増分の時間的一様性を周期性に弱めたものと関係があり，自己分解可能分布と類似の表現をもつ (前島–佐藤 [21]).

多次元の分布で b 分解可能の概念における b を行列としたものについても多くの研究がある．これと一般化 OU 過程の多次元化との関係は今後の問題である．

以上で触れたことはすべて自己分解可能分布の概念と性質の拡張あるいは深化であるといえる．

References

[1] Aoyama, T., Maejima, M. (2007) Characterizations of subclasses of type G distributions on $\mathbb{R}^d$ by stochastic integral representations. *Bernoulli* **13**, 148–160.

[2] Barndorff-Nielsen, O.E., Maejima, M., Sato, K. (2006) Some classes of multivariate infinitely divisible distributions admitting stochastic integral representations. *Bernoulli* **12**, 1–33.

[3] Bertoin, J., Lindner, A., Maller, R. (2008) On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. *Séminaire de Probabilités XLI. Lecture Notes in Math.* **1934**, 137–159. Springer, Berlin.

[4] Bunge, J. (1997) Nested classes of C-decomposable laws. *Ann. Probab.* **25**, 215–229.

[5] Carmona, Ph., Petit, F., Yor, M. (1997) On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion. Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana* 73–126. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid.

[6] Carmona, Ph., Petit, F., Yor, M. (2001) Exponential functionals of Lévy processes. In *Lévy Processes. Theory and Applications* (O.E. Barndorff Nielsen, T. Mikosch and S.I. Resnick, eds.) 41–55. Birkhäuser, Boston.

[7] Erdős, P. (1939) On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.* **61**, 974–976.

[8] Erickson, K.B., Maller, R.A. (2004) Generalised Ornstein-Uhlenbeck processes and the convergence of Lévy integrals. *Séminaire de Probabilités XXXVIII. Lecture Notes in Math.* **1857**, 70–94. Springer, Berlin.

[9] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* **2**, 2nd ed. Wiley, New York.

[10] Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1968) *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, rev. ed. Addison Wesley, Reading, MA (Translation from the Russian original of 1949).

[11] Jurek, Z.J. (1985) Relations between the s-selfdecomposable and selfdecomposable measures. *Ann. Probab.* **13**, 592–608.

[12] Katti, S.K. (1967) Infinite divisibility of integer-valued random variables. *Ann. Math. Statist.* **38**, 1306–1308.

[13] Kondo, H., Maejima, M., Sato, K. (2006) Some properties of exponential integrals of Lévy processes and examples. *Electron. Comm. Probab.* **11**, 291–303.

[14] Lindner, A., Maller, R. (2005) Lévy integrals and the stationarity of generalised Ornstein-Uhlenbeck processes. *Stochastic Process. Appl.* **115**, 1701–1722.

[15] Lindner, A., Sato, K. Continuity properties and infinite divisibility of stationary distributions of some generalized Ornstein–Uhlenbeck processes. *Ann. Probab.*, to appear. http://www.imstat.org/aop/future_papers.htm

[16] Lindner, A., Sato, K. Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein–Uhlenbeck processes. In preparation. (shortly in http://ksato.jp/)

[17] Loève. M. (1945) Nouvelles classes de lois limites. *Bull. Soc. Math. France* **73**, 107–126.

[18] Maejima, M., Naito, Y. (1998) Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems. Probab. Theory Related Fields **112**, 13–31.

[19] Maejima, M., Pérez-Abreu, V., Sato, K. Multivariate infinitely divisible distributions related to arcsine transformations. Submitted.

[20] Maejima, M., Pérez-Abreu, V., Sato, K. Fractional integrals, Upsilon transformations, and classes of infinitely divisible distributions. In preparation.

[21] Maejima, M., Sato, K. (2003) Semi-Lévy processes, semi-selfsimilar processes, and semi-stationary Ornstein–Uhlenbeck type processes. *J. Math. Kyoto Univ.* **43**, 609–639.

[22] Maejima, M., Sato, K. The limits of nested subclasses of several classes of infinitely divisible distributions are identical with the closure of the class of stable distributions. *Probab. Theory Related Fields*, to appear.

[23] Niedbalska-Rajba, T. (1981) On decomposability semigroups on the real line. *Colloq. Math.* **44**, 347–358.

[24] Peres, Y., Schlag, W., Solomyak, B. (2000) Sixty years of Bernoulli convolutions. In *Fractal Geometry and Stochastics II* (C. Bandt, S. Graf and M. Zähle, eds.). Progress in Probability **46**, 39–65. Birkhäuser, Boston.

[25] Sato, K. (1980) Class L of multivariate distributions and its subclasses, *J. Multivariate Anal.* **10**, 207–232.

[26] Sato, K. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[27] Sato, K. (2004) Stochastic integrals in additive processes and application to semi-Lévy processes. *Osaka J. Math.* **41**, 211–236.

[28] Sato, K. (2006) Additive processes and stochastic integrals. *Illinois J. Math.* **50**, 825–851.

[29] Sato, K. (2006) Monotonicity and non-monotonicity of domains of stochastic integral operators. *Probab. Math. Statist.* **26**, 23-39.

[30] Sato, K. (2006) Two families of improper stochastic integrals with respect to Lévy processes. *ALEA Lat. Am. J. Prob. Math. Stat.* **1**, 47–87.

[31] Sato, K. (2007) Transformations of infinitely divisible distributions via improper stochastic integrals. *ALEA Lat. Am. J. Prob. Math. Stat.* **3**, 67-110.

[32] Urbanik, K. (1972) Slowly varying sequences of random variables. *Bull. Acad. Polonaise Sci. Sér. Math. Astronom. Phys.* **20**, 679–682.

[33] Watanabe, T. (2000) Absolute continuity of some semi-selfdecomposable distributions and self-similar measures. *Probab. Theory Related Fields* **117**, 387–405.

[34] Watanabe, T. (2001) Temporal change in distributional properties of Lévy processes. In *Lévy Processes. Theory and Applications* (O.E. Barndorff Nielsen, T. Mikosch and S.I. Resnick, eds.) 89–107. Birkhäuser, Boston.

[35] Wolfe, S.J. (1983) Continuity properties of decomposable probability measures on Euclidean spaces. *J. Multivariate Anal.* **13**, 534–538.